Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca
F.S.T. Mohammedia
Département de Mathématiques
Filière d'Ingénieur IMIAE
Concours d'accès à la première année
Epreuve d'Algèbre. Durée : 2 heures.
11 Juillet 2012

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

I. Calcul des puissances de A.

1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2) La matrice A est-elle inversible ? (On ne demande pas le calcul de la matrice A^{-1}).

3) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f.

4) Justifier que f n'est pas diagonalisable.

5) Déterminer le vecteur $\vec{u}_1$ de E vérifiant :

- $\vec{u}_1$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1.
- La première composante de $\vec{u}_1$ est 1.

6) Déterminer le vecteur $\vec{u}_2$ de E vérifiant :

- $\vec{u}_2$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_2.
- La deuxième composante de $\vec{u}_2$ est 1.

7) Soit $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de E.

8) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

9) Montrer que : $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

10) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11) Rappeler la relation matricielle entre A et T.

12) Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$



On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.

13) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = n2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

II. Matrices commutant avec A.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1) Montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :

$$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$$

(T est définie dans la question **I. 10**).

3) Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.

4) En déduire que M appartient à $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ainsi que la dimension de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.